Examen oficial — Selectividad Matemáticas II (Comunidad Valenciana), Problema A.1 con $(A - I)^2$ (año no indicado en la copia de Material/Algebra/ejercicios matrices selectividad/CORRECCIÓN…pdf); enunciado literal

FICHA MII-A2-P06

Invertibilidad de A, A − 2I y A − I

TEMA / TOPIC	TIPO	DIFICULTAD	PUNTOS	TIEMPO MÁX.
A.2 Determinantes	Secundaria	●●● (3 / 3)	10 pts · a)4 + b)2+2 + c)2	25 min

MATERIAL NECESARIO

Material: calculadora científica. No hace falta ningún formulario: las fórmulas necesarias están en «Teoría básica».

PRERREQUISITOS

- A tiene inversa si y solo si $|A| \neq 0$; una matriz con dos filas proporcionales tiene determinante 0
- Si $P(A) = 0$ con término independiente no nulo, puede despejarse A^{-1} en función de A
- Si $(A - I)^2 = 0$, la matriz A − I no es invertible

TIEMPO DE REFERENCIA

Media de la clase ≈ 18 min. Es una referencia para situarte, no un cronómetro — resolver rápido con el resultado mal no vale nada. En Selectividad se puntúan los pasos razonados, no solo el resultado.

ENUNCIADO

Se dan las matrices cuadradas $I = (1\ 0\ 0\ ;\ 0\ 1\ 0\ ;\ 0\ 0\ 1)$ y $A = (2\ 1\ 1\ ;\ 2\ 3\ 2\ ;\ -3\ -3\ -2)$. Notación: en el texto las matrices se escriben por filas, separadas por «;». Por ejemplo, (1 2 ; 3 4) es la matriz de filas (1 2) y (3 4).

a) Calcular las matrices $(A - I)^2$ y $A \cdot (A - 2I)$. [4]

b) Justificar razonadamente que: b.1) existen las matrices inversas de A y de A − 2I; b.2) no existe la matriz inversa de A − I. [2+2]

c) Determinar el valor del parámetro λ para el que se verifica $A^{-1} = \lambda \cdot (A - 2I)$. [2]

FICHA MII-A2-P06

Invertibilidad de A, A − 2I y A − I

PISTAS PROGRESIVAS

1	General — A − I y A − 2I son matrices muy cercanas a A; calcula las dos primero.
2	Apartado a), $(A - I)^2$ — A − I = (1 1 1 ; 2 2 2 ; −3 −3 −3); al multiplicarla por sí misma sale la matriz nula 0.
3	Apartado a), A(A − 2I) — A − 2I = (0 1 1 ; 2 1 2 ; −3 −3 −4); el producto A·(A − 2I) = −I.
4	Apartado b.1) — calcula $\|A\|$ y $\|A - 2I\|$: si son distintos de 0, existen las inversas.
5	Apartado b.2) — $\|A - I\| = 0$ (las filas 1 y 2 son proporcionales: $F_2 = 2F_1$), luego no hay inversa.
6	Apartado c) — de A·(A − 2I) = −I resulta A·(−(A − 2I)) = I, luego $A^{-1} = -(A - 2I)$: λ = −1.

TEORÍA BÁSICA

- Si A·B = I, entonces $B = A^{-1}$ (matrices cuadradas).
- Si dos filas son proporcionales, $|A| = 0$ y la matriz no tiene inversa.
- Un producto A·(A − 2I) = −I indica directamente que $A^{-1} = -(A - 2I)$.

REFUERZO

LIBRO SM Revuela, Matemáticas II (LOMLOE) — Situación de aprendizaje 1.2 Determinantes.

LIBRO SM Revuela, Matemáticas II (LOMLOE) — Situación de aprendizaje 1.1 Matrices.

APUNTES Tus apuntes de determinantes (Material/Algebra/apuntes determinantes).

VÍDEO Pendiente — hasta encontrar uno fiable, artículo de apoyo: TEMA 2. Matrices II y determinantes (Matemáticas para todos) — matematicasparatodos2.yolasite.com/resources/TEMA%202.%20MATRICES%20II%20-%20DETERMINANTES..pdf

SOLUCIÓN RAZONADA

a) $(A - I)^2 = 0$ (matriz nula 3×3). A·(A − 2I) = (−1 0 0 ; 0 −1 0 ; 0 0 −1) = −I.

b) b.1) $|A| = 1 \neq 0$ y $|A - 2I| = -1 \neq 0$, luego existen A^{-1} y $(A - 2I)^{-1}$. b.2) $|A - I| = 0$ (la fila 2 es el doble de la fila 1), luego A − I no tiene inversa.

c) De A·(A − 2I) = −I se obtiene A·[−(A − 2I)] = I, luego $A^{-1} = -(A - 2I) = -1 \cdot (A - 2I)$, es decir, λ = −1.

RESUMEN — CON TUS PROPIAS PALABRAS

La idea clave de este problema era:

El método o la propiedad que usé:

Si me vuelvo a atascar en un problema parecido, lo primero que miro es:

REGISTRO DE INTENTOS

Fecha	H. inicio	H. fin	Resultado	Pistas	Pasos justificados	Errores de cálculo	¿Repetir?

ESPACIO DE TRABAJO ADICIONAL