Examen oficial — Selectividad Matemáticas II (Comunidad Valenciana), Problema B.1 con la matriz de raíz de 5 (año no indicado en la copia de Material/Algebra/ejercicios matrices selectividad/CORRECCIÓN…pdf); enunciado literal

FICHA MII-A2-P05

Matriz con √5: inversa y valores de λ

TEMA / TOPIC	TIPO	DIFICULTAD	PUNTOS	TIEMPO MÁX.
A.2 Determinantes	Secundaria	●●● (3 / 3)	10 pts · a)4 + b)3 + c)3	28 min

MATERIAL NECESARIO

Material: calculadora científica. No hace falta ningún formulario: las fórmulas necesarias están en «Teoría básica».

PRERREQUISITOS

- Si $A^t \cdot A = k \cdot I$ ($k \neq 0$), entonces $A^{-1} = (1/k) \cdot A^t$
- $A - \lambda I$ no tiene inversa si y solo si $|A - \lambda I| = 0$
- Si $B^{-1} = B^t$, entonces $|B|^2 = 1$, luego $|B| = \pm 1$

TIEMPO DE REFERENCIA

Media de la clase ≈ 20 min. Es una referencia para situarte, no un cronómetro — resolver rápido con el resultado mal no vale nada. En Selectividad se puntúan los pasos razonados, no solo el resultado.

ENUNCIADO

Se da la matriz A = (√5 0 0 ; 0 1 −2 ; 0 2 1). Obtén razonadamente, escribiendo todos los pasos: Notación: en el texto las matrices se escriben por filas, separadas por «;». Por ejemplo, (1 2 ; 3 4) es la matriz de filas (1 2) y (3 4).

a) La comprobación de que $A^{-1} = 5^{-1} \cdot A^t$, siendo A^t la traspuesta de A. [4]

b) Los valores reales del parámetro λ para los que la matriz $A - \lambda I$ no tiene inversa, siendo I la identidad de orden 3. [3]

c) El determinante de una matriz cuadrada B cuyo determinante es mayor que 0 y que verifica la igualdad $B^{-1} = B^t$. [3]

FICHA MII-A2-P05

Matriz con √5: inversa y valores de λ

PISTAS PROGRESIVAS

1	General — los tres apartados usan la estructura de A: un bloque 1×1 (√5) y un bloque 2×2.
2	Apartado a) — calcula $\|A\|$ (= 5√5) y la matriz de adjuntos, o más fácil: comprueba $A^t \cdot A = 5I$.
3	Apartado a), conclusión — si $A^t \cdot A = 5I$, multiplicando por A^{-1} por la derecha resulta $A^t = 5A^{-1}$, es decir, $A^{-1} = (1/5)A^t$.
4	Apartado b) — $\|A - \lambda I\| = (\sqrt{5} - \lambda)\cdot[(1 - \lambda)^2 + 4]$.
5	Apartado b), ecuación — $(\sqrt{5} - \lambda)((1 - \lambda)^2 + 4) = 0$. El segundo factor es siempre positivo, así que solo $\lambda = \sqrt{5}$.
6	Apartado c) — de $B^{-1} = B^t$ y $\|B^{-1}\| = 1/\|B\|$ se obtiene $1/\|B\| = \|B\|$; con $\|B\| > 0$ queda un único valor.

TEORÍA BÁSICA

- Si $A^t \cdot A = k \cdot I$ entonces $A^{-1} = A^t/k$; si $k = 1$, la matriz es ortogonal ($A^{-1} = A^t$).
- Los valores λ que anulan $|A - \lambda I|$ son los autovalores; con raíces complejas no hay valores reales.
- Matrices con $B^{-1} = B^t$ tienen determinante ±1.

REFUERZO

LIBRO SM Revuela, Matemáticas II (LOMLOE) — Situación de aprendizaje 1.2 Determinantes.

LIBRO SM Revuela, Matemáticas II (LOMLOE) — Situación de aprendizaje 1.1 Matrices.

APUNTES Tus apuntes de determinantes (Material/Algebra/apuntes determinantes).

VÍDEO Pendiente — hasta encontrar uno fiable, artículo de apoyo: Determinantes, R. Núñez Nogales — blogsaverroes.juntadeandalucia.es/rafaelnunezmat/files/2024/10/determinantes.docx

SOLUCIÓN RAZONADA

a) $A^t \cdot A = (5\ 0\ 0\ ;\ 0\ 5\ 0\ ;\ 0\ 0\ 5) = 5I$. Multiplicando por A^{-1} por la derecha, $A^t = 5A^{-1}$, luego $A^{-1} = 5^{-1} \cdot A^t$. ($|A| = 5\sqrt{5} \neq 0$, así que A es invertible.)

b) $|A - \lambda I| = (\sqrt{5} - \lambda)((1 - \lambda)^2 + 4) = 0$. Como $(1 - \lambda)^2 + 4 > 0$ siempre, solo $\lambda = \sqrt{5}$. $A - \lambda I$ no tiene inversa únicamente para $\lambda = \sqrt{5}$.

c) $B^{-1} = B^t \rightarrow |B^{-1}| = |B^t| \rightarrow 1/|B| = |B| \rightarrow |B|^2 = 1 \rightarrow |B| = \pm 1$; como $|B| > 0$, $|B| = 1$.

RESUMEN — CON TUS PROPIAS PALABRAS

La idea clave de este problema era:

El método o la propiedad que usé:

Si me vuelvo a atascar en un problema parecido, lo primero que miro es:

REGISTRO DE INTENTOS

Fecha	H. inicio	H. fin	Resultado	Pistas	Pasos justificados	Errores de cálculo	¿Repetir?

ESPACIO DE TRABAJO ADICIONAL