Examen oficial — Selectividad Matemáticas II (Comunidad Valenciana), Problema B.1 (año no indicado en la copia de Material/Algebra/ejercicios matrices selectividad/CORRECCIÓN…pdf); enunciado literal

FICHA MII-A2-P04

Propiedades de los determinantes y $C^2 = 2C - I$

TEMA / TOPIC	TIPO	DIFICULTAD	PUNTOS	TIEMPO MÁX.
A.2 Determinantes	Principal	●●● (3 / 3)	10 pts · a)2,5+2,5 + b)3 + c)2	28 min

MATERIAL NECESARIO

Material: calculadora científica. No hace falta ningún formulario: las fórmulas necesarias están en «Teoría básica».

PRERREQUISITOS

- $|A\cdot B| = |A|\cdot|B|$; $|A^t| = |A|$; $|A^{-1}| = 1/|A|$; $|k\cdot A| = k^n\cdot|A|$ para una matriz de orden n
- Si $C^2 = 2C - I$, se pueden calcular potencias superiores sustituyendo C^2 repetidamente
- Si B es invertible y $B\cdot B = B$, multiplica por B^{-1} para despejar B

TIEMPO DE REFERENCIA

Media de la clase ≈ 20 min. Es una referencia para situarte, no un cronómetro — resolver rápido con el resultado mal no vale nada. En Selectividad se puntúan los pasos razonados, no solo el resultado.

ENUNCIADO

Obtén razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado: Notación: en el texto las matrices se escriben por filas, separadas por «;». Por ejemplo, (1 2 ; 3 4) es la matriz de filas (1 2) y (3 4).

a) La comprobación de que $C^2 = 2C - I$, siendo $C = (5\ -4\ 2\ ;\ 2\ -1\ 1\ ;\ -4\ 4\ -1)$ e I la matriz identidad 3×3, y el valor de la matriz C^4. [2,5+2,5]

b) El valor del determinante de la matriz $(3A^t)\cdot(4A^{-1})^{-1}$, sabiendo que A es una matriz cuadrada de cuatro columnas cuyo determinante vale −1. [3]

c) La matriz B que admite inversa y que verifica la igualdad $B\cdot B = B$. [2]

FICHA MII-A2-P04

Propiedades de los determinantes y $C^2 = 2C - I$

PISTAS PROGRESIVAS

1	General — a) es un cálculo directo; b) usa solo propiedades (no se conoce A); c) es un razonamiento.
2	Apartado a), comprobación — calcula C^2 multiplicando C por C y $2C - I$; deben coincidir elemento a elemento.
3	Apartado a), C^4 — $C^4 = (C^2)^2 = (2C - I)^2 = 4C^2 - 4C + I = 4(2C - I) - 4C + I = 4C - 3I$.
4	Apartado b), orden — A tiene 4 columnas, luego es 4×4. $\lvert 3A^t\rvert = 3^4 \cdot \lvert A\rvert$.
5	Apartado b), inversa — $\lvert(4A^{-1})^{-1}\rvert = 1/\lvert 4A^{-1}\rvert = 1/(4^4 \cdot \lvert A^{-1}\rvert)$, y $\lvert A^{-1}\rvert = 1/\lvert A\rvert$.
6	Apartado c) — como B admite inversa, multiplica $B \cdot B = B$ por B^{-1} por la izquierda.

TEORÍA BÁSICA

- $\lvert k \cdot A\rvert = k^n \cdot \lvert A\rvert$ (n = orden de la matriz): el factor k se saca n veces, una por fila.
- $\lvert A \cdot B\rvert = \lvert A\rvert \cdot \lvert B\rvert$, $\lvert A^t\rvert = \lvert A\rvert$, $\lvert A^{-1}\rvert = 1/\lvert A\rvert$ y $\lvert(A)^{-1}\rvert = 1/\lvert A\rvert$.
- Una matriz invertible e idempotente ($B^2 = B$) es siempre la identidad.

REFUERZO

LIBRO SM Revuela, Matemáticas II (LOMLOE) — Situación de aprendizaje 1.2 Determinantes.

LIBRO SM Revuela, Matemáticas II (LOMLOE) — Situación de aprendizaje 1.1 Matrices.

APUNTES Tus apuntes de determinantes (Material/Algebra/apuntes determinantes).

VÍDEO Pendiente — hasta encontrar uno fiable, artículo de apoyo: Determinantes, R. Núñez Nogales — blogsaverroes.juntadeandalucia.es/rafaelnunezmat/files/2024/10/determinantes.docx

SOLUCIÓN RAZONADA

a) $C^2 = (9\ {-8}\ 4\ ;\ 4\ {-3}\ 2\ ;\ {-8}\ 8\ {-3})$ y $2C - I = (9\ {-8}\ 4\ ;\ 4\ {-3}\ 2\ ;\ {-8}\ 8\ {-3})$: coinciden. $C^4 = 4C - 3I = (17\ {-16}\ 8\ ;\ 8\ {-7}\ 4\ ;\ {-16}\ 16\ {-7})$.

b) $\lvert 3A^t\rvert = 3^4 \cdot \lvert A\rvert = 81 \cdot (-1) = -81$. $\lvert 4A^{-1}\rvert = 4^4 \cdot \lvert A^{-1}\rvert = 256 \cdot (-1) = -256$, luego $\lvert(4A^{-1})^{-1}\rvert = -1/256$. El producto: $(-81) \cdot (-1/256) = 81/256$.

c) $B^{-1} \cdot B \cdot B = B^{-1} \cdot B \rightarrow B = I$. La matriz es la identidad.

RESUMEN — CON TUS PROPIAS PALABRAS

La idea clave de este problema era:

El método o la propiedad que usé:

Si me vuelvo a atascar en un problema parecido, lo primero que miro es:

REGISTRO DE INTENTOS

Fecha	H. inicio	H. fin	Resultado	Pistas	Pasos justificados	Errores de cálculo	¿Repetir?

ESPACIO DE TRABAJO ADICIONAL