Examen oficial — Selectividad Matemáticas II, septiembre de 2011, Ejercicio A, Problema A.1 (enunciado literal; solución de Material/Algebra/ejercicios matrices selectividad/CORRECCIÓN…pdf)

FICHA MII-A1-P07

Matrices idempotentes: $M^2 = M$

TEMA / TOPIC	TIPO	DIFICULTAD	PUNTOS	TIEMPO MÁX.
A.1 Matrices	Secundaria	●●● (3 / 3)	10 pts · a)2 + b)2 + c)4 + d)2	28 min

MATERIAL NECESARIO

Material: calculadora científica. No hace falta ningún formulario: las fórmulas necesarias están en «Teoría básica».

PRERREQUISITOS

- Una matriz M es idempotente si $M^2 = M$
- $B = A - kI$ tiene inversa si y solo si $|B| \neq 0$
- Para comprobar una igualdad entre matrices en términos de M, expande los productos usando $M^2 = M$ y la propiedad distributiva

TIEMPO DE REFERENCIA

Media de la clase ≈ 20 min. Es una referencia para situarte, no un cronómetro — resolver rápido con el resultado mal no vale nada. En Selectividad se puntúan los pasos razonados, no solo el resultado.

ENUNCIADO

Se dan las matrices $A = (0\ -2\ ;\ 1\ 3)$ e $I = (1\ 0\ ;\ 0\ 1)$ y M, una matriz de dos filas y dos columnas que verifica $M^2 = M$. Obtén razonadamente: Notación: en el texto las matrices se escriben por filas, separadas por «;». Por ejemplo, (1 2 ; 3 4) es la matriz de filas (1 2) y (3 4).

a) Todos los valores reales k para los que la matriz $B = A - kI$ tiene inversa. [2]

b) La matriz inversa B^{-1} cuando $k = 3$. [2]

c) Las constantes reales α y β para las que se verifica que $\alpha A^2 + \beta A = -2I$. [4]

d) Comprobar razonadamente que la matriz $P = I - M$ cumple las relaciones $P^2 = P$ y $M \cdot P = P \cdot M$. [2]

FICHA MII-A1-P07

Matrices idempotentes: $M^2 = M$

PISTAS PROGRESIVAS

1	General — a), b) y c) dependen de A; d) es una demostración con M.
2	Apartado a) — $\|A - kI\| = (-k)(3 - k) - (-2)(1) = k^2 - 3k + 2 = (k - 1)(k - 2)$. Tiene inversa si no se anula.
3	Apartado b) — para k = 3: B = (−3 −2 ; 1 0), $\|B\| = 2$; calcula $B^{-1} = (1/2)\cdot(0\ 2\ ;\ -1\ -3)$.
4	Apartado c), método — calcula $A^2 = (-2\ -6\ ;\ 3\ 7)$ y plantea $\alpha A^2 + \beta A + 2I = 0$, elemento a elemento: sale un sistema de ecuaciones.
5	Apartado c), atajo — $A^2 - 3A + 2I = 0$ (el polinomio de A); compara coeficiente a coeficiente con $\alpha A^2 + \beta A + 2I = 0$.
6	Apartado d) — $P^2 = (I - M)(I - M) = I - 2M + M^2 = I - 2M + M = I - M = P$. Usa $M\cdot I = I\cdot M = M$.

TEORÍA BÁSICA

- Una matriz es invertible si y solo si su determinante es ≠ 0; para B = A − kI, |B| es un polinomio en k.
- Si $M^2 = M$, entonces $M^n = M$ para todo n ≥ 1, y $(I - M)^2 = I - M$.
- Dos matrices conmutan si AB = BA; I conmuta con cualquier matriz.

REFUERZO

LIBRO SM Revuela, Matemáticas II (LOMLOE) — Situación de aprendizaje 1.1 Matrices.

APUNTES Tus apuntes de matrices (Material/Algebra/apuntes matrices, fotos IMG_2565 a IMG_2570).

VÍDEO Pendiente — hasta encontrar uno fiable, artículo de apoyo: TEMA 2. Matrices II y determinantes (Matemáticas para todos) — matematicasparatodos2.yolasite.com/resources/TEMA%202.%20MATRICES%20II%20-%20DETERMINANTES..pdf

SOLUCIÓN RAZONADA

a) $|B| = (k - 1)(k - 2)$. B tiene inversa para todo $k \notin \{1, 2\}$.

b) Para k = 3: B = (−3 −2 ; 1 0), $|B| = 2$ y $B^{-1} = (0\ 1\ ;\ -1/2\ -3/2)$.

c) $A^2 = (-2\ -6\ ;\ 3\ 7)$. $\alpha A^2 + \beta A = (-2\alpha\ -6\alpha - 2\beta\ ;\ 3\alpha + \beta\ \ 7\alpha + 3\beta) = -2I$ implica $-2\alpha = -2$, $-6\alpha - 2\beta = 0$, $3\alpha + \beta = 0$ y $7\alpha + 3\beta = -2$: se obtiene $\alpha = 1$ y $\beta = -3$.

d) $P^2 = (I - M)(I - M) = I - 2M + M^2 = I - 2M + M = I - M = P$. Además $M\cdot P = M(I - M) = M - M^2 = M - M = 0$ y $P\cdot M = (I - M)M = M - M^2 = 0$: MP = PM.

RESUMEN — CON TUS PROPIAS PALABRAS

La idea clave de este problema era:

El método o la propiedad que usé:

Si me vuelvo a atascar en un problema parecido, lo primero que miro es:

REGISTRO DE INTENTOS

Fecha	H. inicio	H. fin	Resultado	Pistas	Pasos justificados	Errores de cálculo	¿Repetir?

ESPACIO DE TRABAJO ADICIONAL