Examen oficial — Selectividad Matemáticas II, septiembre de 2020, Problema 4 (enunciado literal; solución de Material/Algebra/ejercicios matrices selectividad/SolSep2020_4 matrices.pdf)

FICHA MII-A1-P06

Inversa de una matriz 3×3 y polinomio matricial

TEMA / TOPIC	TIPO	DIFICULTAD	PUNTOS	TIEMPO MÁX.
A.1 Matrices	Principal	●●● (3 / 3)	9 pts (puntuación del examen original) · a)3 + b)3 + c)3	28 min

MATERIAL NECESARIO

Material: calculadora científica. No hace falta ningún formulario: las fórmulas necesarias están en «Teoría básica».

PRERREQUISITOS

- Inversa por adjuntos: $A^{-1} = (1/|A|)\cdot(\text{Adj } A)^t$, con $|A| \neq 0$
- Si una matriz cumple un polinomio igual a 0 (por ejemplo $A^3 - 3A^2 + 3A - I = 0$), se puede despejar A^{-1} multiplicando por A^{-1}
- Un sistema homogéneo $(B)x = 0$ tiene infinitas soluciones si y solo si $|B| = 0$

TIEMPO DE REFERENCIA

Media de la clase ≈ 20 min. Es una referencia para situarte, no un cronómetro — resolver rápido con el resultado mal no vale nada. En Selectividad se puntúan los pasos razonados, no solo el resultado.

ENUNCIADO

Sea A = (1 2 0 ; 0 1 0 ; 0 2 1). Obtén razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado: Notación: en el texto las matrices se escriben por filas, separadas por «;». Por ejemplo, (1 2 ; 3 4) es la matriz de filas (1 2) y (3 4).

a) La justificación de que A tiene inversa y el cálculo de dicha matriz inversa. [3]

b) Dos constantes a, b de modo que $A^{-1} = A^2 + aA + bI$. Se puede usar (sin comprobarlo) que A verifica $A^3 - 3A^2 + 3A - I = 0$, siendo I la identidad. [3]

c) El valor de λ para que el sistema $(A - \lambda I)\cdot(x\ y\ z)^t = (0\ 0\ 0)^t$ tenga infinitas soluciones. Para dicho valor de λ, hallar todas las soluciones del sistema. [3]

FICHA MII-A1-P06

Inversa de una matriz 3×3 y polinomio matricial

PISTAS PROGRESIVAS

1	General — los tres apartados giran en torno al mismo polinomio característico de A.
2	Apartado a) — $\|A\| = 1 \neq 0$, así que existe A^{-1}. Calcula adjuntos, traspón y divide entre $\|A\|$.
3	Apartado b), idea — multiplica la igualdad $A^{-1} = A^2 + aA + bI$ por A: obtienes $I = A^3 + aA^2 + bA$.
4	Apartado b), siguiente paso — pásalo todo a un lado: $A^3 + aA^2 + bA - I = 0$, y compáralo con $A^3 - 3A^2 + 3A - I = 0$ (dato del enunciado).
5	Apartado c) — $(A - \lambda I)x = 0$ es homogéneo: tiene infinitas soluciones si y solo si $\|A - \lambda I| = 0$.
6	Apartado c), cálculo — $\|A - \lambda I| = (1 - \lambda)^3$, así que $\lambda = 1$. Sustituye $\lambda = 1$ y resuelve el sistema (0 2 0 ; 0 0 0 ; 0 2 0).

TEORÍA BÁSICA

- $A^{-1} = (1/|A|)\cdot(\text{Adj } A)^t$. Si hay un polinomio $P(A) = 0$ con término independiente distinto de 0, puede despejarse A^{-1}.
- Un sistema homogéneo siempre tiene la solución x = 0; hay infinitas soluciones si y solo si el determinante de la matriz del sistema es cero.
- Para $\lambda = 1$ la solución es x libre, y = 0, z libre: un plano.

REFUERZO

LIBRO SM Revuela, Matemáticas II (LOMLOE) — Situación de aprendizaje 1.1 Matrices.

LIBRO SM Revuela, Matemáticas II (LOMLOE) — Situación de aprendizaje 1.2 Determinantes.

APUNTES Tus apuntes de matrices (Material/Algebra/apuntes matrices, fotos IMG_2565 a IMG_2570).

VÍDEO Pendiente — hasta encontrar uno fiable, artículo de apoyo: TEMA 2. Matrices II y determinantes (Matemáticas para todos) — matematicasparatodos2.yolasite.com/resources/TEMA%202.%20MATRICES%20II%20-%20DETERMINANTES..pdf

SOLUCIÓN RAZONADA

a) $|A| = 1 \neq 0$, luego A tiene inversa. $A^{-1} = (1\ -2\ 0\ ;\ 0\ 1\ 0\ ;\ 0\ -2\ 1)$.

b) De $A^3 - 3A^2 + 3A - I = 0$ se obtiene $A^3 + (-3)A^2 + 3A - I = 0$. Comparando con $A^3 + aA^2 + bA - I = 0$ (que sale de multiplicar $A^{-1} = A^2 + aA + bI$ por A), resulta $a = -3$ y $b = 3$.

c) $|A - \lambda I| = (1 - \lambda)^3 = 0$, luego $\lambda = 1$. Para $\lambda = 1$, $A - I = (0\ 2\ 0\ ;\ 0\ 0\ 0\ ;\ 0\ 2\ 0)$ y el sistema es $2y = 0$: la solución es $x = \alpha$, $y = 0$, $z = \beta$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

RESUMEN — CON TUS PROPIAS PALABRAS

La idea clave de este problema era:

El método o la propiedad que usé:

Si me vuelvo a atascar en un problema parecido, lo primero que miro es:

REGISTRO DE INTENTOS

Fecha	H. inicio	H. fin	Resultado	Pistas	Pasos justificados	Errores de cálculo	¿Repetir?

ESPACIO DE TRABAJO ADICIONAL