Redactado — rango de una matriz por el método de Gauss y discusión según un parámetro, con datos propios

FICHA MII-A1-P03

Rango de una matriz y parámetros

TEMA / TOPIC	TIPO	DIFICULTAD	PUNTOS	TIEMPO MÁX.
A.1 Matrices	Secundaria	●●○ (2 / 3)	10 pts · a)4 + b)6	22 min

MATERIAL NECESARIO

Material: calculadora científica. No hace falta ningún formulario: las fórmulas necesarias están en «Teoría básica».

PRERREQUISITOS

- El rango de una matriz es el número de filas no nulas de su forma escalonada (o el mayor orden de un menor distinto de 0)
- Transformaciones que no cambian el rango: intercambiar filas, multiplicar una fila por un número distinto de 0, sumar a una fila un múltiplo de otra
- Una matriz cuadrada n×n tiene rango n si y solo si su determinante es distinto de 0

TIEMPO DE REFERENCIA

Media de la clase ≈ 15 min. Es una referencia para situarte, no un cronómetro — resolver rápido con el resultado mal no vale nada. En Selectividad se puntúan los pasos razonados, no solo el resultado.

ENUNCIADO

Se consideran la matriz M = (1 2 −1 3 ; 2 4 0 2 ; 1 2 1 −1) y la matriz N(k) = (1 1 k ; 1 k 1 ; k 1 1), con k un número real. Notación: en el texto las matrices se escriben por filas, separadas por «;». Por ejemplo, (1 2 ; 3 4) es la matriz de filas (1 2) y (3 4).

a) Calcula el rango de M por el método de Gauss, indicando las transformaciones que usas. [4]

b) Estudia el rango de N(k) según los valores de k. [6]

FICHA MII-A1-P03

Rango de una matriz y parámetros

PISTAS PROGRESIVAS

1	General — la (a) es mecánica (Gauss); la (b) combina determinantes y casos particulares.
2	Apartado a) — usa la primera fila como pivote: $F_2 \to F_2 - 2F_1$ y $F_3 \to F_3 - F_1$.
3	Apartado a), continúa — tras eso quedan una fila de ceros y una fila no nula distinta de la 1.ª; mira si F_2 y F_3 son proporcionales.
4	Apartado b) — como N(k) es 3×3, calcula $\|N(k)\|$ y busca los valores de k que lo anulan.
5	Apartado b), factorización — $\|N(k)\| = -(k-1)^2(k+2)$. Los valores críticos son k = 1 y k = −2.
6	Apartado b), casos — si $k \neq 1$ y $k \neq -2$, el rango es 3. Sustituye k = 1 y k = −2 en la matriz y calcula el rango de cada caso a mano.

TEORÍA BÁSICA

- Por Gauss: lleva la matriz a forma escalonada y cuenta las filas no nulas.
- Con un parámetro: rango máximo cuando el determinante (o los menores de orden máximo) no se anulan; hay que estudiar aparte los valores que lo anulan.
- El rango no puede superar el menor de los números de filas y columnas.

REFUERZO

LIBRO SM Revuela, Matemáticas II (LOMLOE) — Situación de aprendizaje 1.1 Matrices.

APUNTES Tus apuntes de matrices (Material/Algebra/apuntes matrices, fotos IMG_2565 a IMG_2570).

VÍDEO Pendiente — hasta encontrar uno fiable, artículo de apoyo: Rango de una matriz, R. Núñez Nogales — blogsaverroes.juntadeandalucia.es/rafaelnunezmat/files/2024/10/rango-de-una-matriz-teorema-de-Rouche-Frobenius-discusion-de-sistemas.docx

SOLUCIÓN RAZONADA

a) $F_2 \to F_2 - 2F_1$ da (0 0 2 −4) y $F_3 \to F_3 - F_1$ da (0 0 2 −4); luego $F_3 \to F_3 - F_2$ da una fila de ceros. Quedan 2 filas no nulas: rango(M) = 2.

b) $|N(k)| = -(k-1)^2(k+2)$. Si $k \neq 1$ y $k \neq -2$, $|N(k)| \neq 0$ y rango = 3. Si k = 1, todas las filas son (1 1 1): rango = 1. Si k = −2, N = (1 1 −2 ; 1 −2 1 ; −2 1 1) tiene $|N| = 0$ y un menor de orden 2 distinto de 0 (por ejemplo $1\cdot(-2) - 1\cdot 1 = -3$), luego rango = 2.

RESUMEN — CON TUS PROPIAS PALABRAS

La idea clave de este problema era:

El método o la propiedad que usé:

Si me vuelvo a atascar en un problema parecido, lo primero que miro es:

REGISTRO DE INTENTOS

Fecha	H. inicio	H. fin	Resultado	Pistas	Pasos justificados	Errores de cálculo	¿Repetir?

ESPACIO DE TRABAJO ADICIONAL