Examen oficial — Selectividad Matemáticas II, julio de 2017, Opción B, Problema B.1 (enunciado literal; solución de Material/Algebra/ejercicios matrices selectividad/CORRECCIÓN…pdf)

FICHA MII-A1-P02

Potencias de una matriz: $A^4 = I$

TEMA / TOPIC	TIPO	DIFICULTAD	PUNTOS	TIEMPO MÁX.
A.1 Matrices	Principal	●●○ (2 / 3)	10 pts · a)2+2 + b)2 + c)4	25 min

MATERIAL NECESARIO

Material: calculadora científica. No hace falta ningún formulario: las fórmulas necesarias están en «Teoría básica».

PRERREQUISITOS

- Una matriz cuadrada A tiene inversa si y solo si $|A| \neq 0$, y entonces $A^{-1} = (1/|A|)\cdot(\text{Adj } A)^t$
- Si $A^k = I$, las potencias se repiten con periodo k: $A^n = A^{(n \bmod k)}$
- $A^{n+m} = A^n \cdot A^m$, y $(A^a)^b = A^{ab}$

TIEMPO DE REFERENCIA

Media de la clase ≈ 18 min. Es una referencia para situarte, no un cronómetro — resolver rápido con el resultado mal no vale nada. En Selectividad se puntúan los pasos razonados, no solo el resultado.

ENUNCIADO

Se consideran las matrices A = (0 0 −1 ; 0 1 0 ; 1 0 0) e I = (1 0 0 ; 0 1 0 ; 0 0 1). Obtén razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado: Notación: en el texto las matrices se escriben por filas, separadas por «;». Por ejemplo, (1 2 ; 3 4) es la matriz de filas (1 2) y (3 4).

a) La justificación de que A tiene matriz inversa y el cálculo de dicha inversa A^{-1}. [2+2]

b) La justificación de que $A^4 = I$. [2]

c) El cálculo de las matrices A^7, A^{30} y A^{100}. [4]

FICHA MII-A1-P02

Potencias de una matriz: $A^4 = I$

PISTAS PROGRESIVAS

1	General — en toda la ficha usa el resultado de cada apartado en el siguiente: la inversa del a) ayuda con A^7 en c).
2	Apartado a), justificación — calcula $\|A\|$ con la regla de Sarrus o desarrollando por la 2.ª fila; si es distinto de 0, A es invertible.
3	Apartado a), cálculo — matriz de adjuntos, traspuesta y divide entre $\|A\|$. Aquí $\|A\| = 1$.
4	Apartado b) — calcula A^2 multiplicando A por A, y luego $A^4 = A^2 \cdot A^2$.
5	Apartado c), idea — como $A^4 = I$, divide el exponente entre 4 y quédate con el resto: $A^7 = A^4 \cdot A^3 = A^3 = A^{-1}$ (porque $A^4 = I$).
6	Apartado c), A^{30} — $30 = 4 \cdot 7 + 2$, así que $A^{30} = (A^4)^7 \cdot A^2 = A^2$. A^{100} — $100 = 4 \cdot 25$, así que $A^{100} = (A^4)^{25} = I$.

TEORÍA BÁSICA

- Si $|A| \neq 0$ existe $A^{-1} = (1/|A|) \cdot (\text{Adj } A)^t$; si $|A| = 0$ no existe.
- Si $A^k = I$, entonces $A^n = A^r$ con r el resto de dividir n entre k.
- $A^{-1} = A^{k-1}$ cuando $A^k = I$ (porque $A \cdot A^{k-1} = I$).

REFUERZO

LIBRO SM Revuela, Matemáticas II (LOMLOE) — Situación de aprendizaje 1.1 Matrices.

APUNTES Tus apuntes de matrices (Material/Algebra/apuntes matrices, fotos IMG_2565 a IMG_2570).

VÍDEO Pendiente — hasta encontrar uno fiable, artículo de apoyo: TEMA 2. Matrices II y determinantes (Matemáticas para todos) — matematicasparatodos2.yolasite.com/resources/TEMA%202.%20MATRICES%20II%20-%20DETERMINANTES..pdf

SOLUCIÓN RAZONADA

a) $|A| = 1 \neq 0$, luego existe A^{-1}. Adjuntos y traspuesta dan $A^{-1} = (0\ 0\ 1\ ;\ 0\ 1\ 0\ ;\ -1\ 0\ 0)$.

b) $A^2 = (-1\ 0\ 0\ ;\ 0\ 1\ 0\ ;\ 0\ 0\ -1)$ y $A^4 = A^2 \cdot A^2 = (1\ 0\ 0\ ;\ 0\ 1\ 0\ ;\ 0\ 0\ 1) = I$.

c) $A^7 = A^4 \cdot A^3 = A^3 = A^2 \cdot A = A^{-1} = (0\ 0\ 1\ ;\ 0\ 1\ 0\ ;\ -1\ 0\ 0)$. $A^{30} = (A^4)^7 \cdot A^2 = A^2 = (-1\ 0\ 0\ ;\ 0\ 1\ 0\ ;\ 0\ 0\ -1)$. $A^{100} = (A^4)^{25} = I$.

RESUMEN — CON TUS PROPIAS PALABRAS

La idea clave de este problema era:

El método o la propiedad que usé:

Si me vuelvo a atascar en un problema parecido, lo primero que miro es:

REGISTRO DE INTENTOS

Fecha	H. inicio	H. fin	Resultado	Pistas	Pasos justificados	Errores de cálculo	¿Repetir?

ESPACIO DE TRABAJO ADICIONAL